

**Задача 1.** Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2([z]^2 + 1)(\{z\}^2 + 1), \\ y^2 + z^2 = 2([x]^2 + 1)(\{x\}^2 + 1), \\ x^2 + z^2 = 2([y]^2 + 1)(\{y\}^2 + 1), \end{cases}$$

где  $[w]$  обозначает целую часть действительного числа  $w$ , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $w$ ,  $\{w\} = w - [w]$  — дробная часть числа  $w$ .

**Решение.** Сложим все уравнения, получим

$$x^2 + y^2 + z^2 = ([x]^2 + 1)(\{x\}^2 + 1) + ([y]^2 + 1)(\{y\}^2 + 1) + ([z]^2 + 1)(\{z\}^2 + 1). \quad (1)$$

Дальше заметим, что неравенство  $a^2 \leq ([a]^2 + 1)(\{a\}^2 + 1)$  справедливо всегда и обращается в равенство только если  $[a] \cdot \{a\} = 1$ . Действительно, пусть  $[a] = n$ ,  $\{a\} = t$ , тогда  $a = n + t$  и получаем неравенство  $(n + t)^2 \leq (n^2 + 1)(t^2 + 1)$  которое равносильно неравенству  $(nt - 1)^2 \geq 0$ . Следовательно, равенство (1) возможно только в случае, когда  $[x] \cdot \{x\} = 1$ ,  $[y] \cdot \{y\} = 1$  и  $[z] \cdot \{z\} = 1$ . Поскольку дробная часть всегда неотрицательна, отсюда следует, что  $x, y$  и  $z$  положительны.

Итак,  $x^2 = ([x]^2 + 1)(\{x\}^2 + 1)$ ,  $y^2 = ([y]^2 + 1)(\{y\}^2 + 1)$ ,  $z^2 = ([z]^2 + 1)(\{z\}^2 + 1)$ . Подставим в систему, получим, что  $x^2 + y^2 = 2z^2$ ,  $y^2 + z^2 = 2x^2$ ,  $x^2 + z^2 = 2y^2$ . Отсюда  $x^2 = y^2 = z^2$ , а поскольку они положительны, то  $x = y = z$ .

**Ответ:** все тройки вида  $(a, a, a)$ , где  $a > 0$  и  $[a] \cdot \{a\} = 1$  (т. е.  $a = n\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ).

**Задача 2.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  с углом  $20^\circ$  при вершине  $A$  ( $AB = AC$ ). На стороне  $AB$  выбрана точка  $D$  так, что  $\angle CBD = 50^\circ$ , а на стороне  $AC$  выбрана точка  $E$  так, что  $\angle CBE = 60^\circ$ . Найти угол  $DEB$ .

**Решение.** Отметим на стороне  $AC$  точку  $F$  так, чтобы  $\angle CBF = 20^\circ$ . Тогда треугольник  $BDF$  равносторонний, а треугольник  $DFE$  равнобедренный с углом равным  $40^\circ$  при вершине  $F$ . Тогда  $100^\circ - \angle DEB = 40^\circ + \angle DEB$ , откуда  $\angle DEB = 30^\circ$

**Задача 3.** На гладком столе лежит груз массой  $m = 990$  г, прикрепленный к стене ненапряженной пружиной жесткости  $k = 100$  Н/м. Пружина расположена перпендикулярно стене. В груз врезается пуля массой  $m = 10$  г, летящая горизонтально со скоростью  $100$  м/с по прямой, перпендикулярной стенке. Найдите промежуток времени от начала движения груза с пулей, застрявшей в нем, до момента первого максимального сжатия пружины.

**Решение.** Скорость пули не играет роли. При отсутствии трения груз будет совершать гармонические колебания с периодом  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{10} = 0,63$ . Искомое время это четверть периода. Ответ.  $\frac{T}{4} = 0,16$ .

**Задача 4.** С Земли и тела  $N$  Солнечной системы ведутся наблюдения за звездой созвездия Дева. Были измерены годовичные параллаксы — для тела  $N$  параллакс оказался в два раза меньше земного. При каком значении альбедо равновесная температура тела  $N$  может быть равна земной? Тело  $N$  считайте шаром, влияние атмосферы не учитывайте. Геометрическое альбедо Земли  $a_3 = 0,37$ .

**Решение.** Отношение параллаксов равно отношению больших полуосей орбит, т.е. тело  $N$  находится в два раза ближе к Солнцу, чем Земля. Энергия, которую получает шарообразное тело от Солнца можно найти по формуле:

$$E_{in} = \frac{E_S}{4\pi d^2} \cdot \pi R^2(1 - a),$$

где  $E_S$  — общая энергия, излучаемая Солнцем,  $d$  — расстояние от тела до Солнца,  $R$  — радиус тела,  $a$  — альбеда тела. Энергию, которую тело излучает найдем из закона Стефана–Больцмана:

$$E_{out} = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

где  $T$  — температура тела,  $\sigma$  — константа. Из баланса энергий  $E_{in} = E_{out}$  можем выразить альбеда  $1 - a = \frac{16\pi d^2 \sigma T^4}{E_S}$ . По условию, температура тела  $N$  равна земной, откуда

$$\frac{1 - a_N}{1 - a_3} = \left(\frac{d_N}{d_3}\right)^2 = \frac{1}{4} \implies a_N = 0,84.$$

**Задача 5.** При заселении новой планеты планируется взять с собой в качестве источника пищи вид  $X$ . Чтобы инвазивный вид  $X$  не нанес вред экологической системе планеты, было принято также взять с собой представителей вида  $Y$  (хищников), который питается только особями вида  $X$  (жертвами). Земные ученые разработали следующую дискретную модель взаимодействия этих двух популяций. Пусть число жертв равно  $N$  в текущем месяце, а число хищников —  $P$ . Тогда на следующий месяц число жертв будет равно  $\frac{NR}{2AP}$ , а число хищников:  $N - \frac{N}{2AP}$ .

Напишите программу на любом из четырех языков программирования: *Pascal*, *Cu*, *C++*, *Python*, которая будет принимать на вход значения  $A$ ,  $R$ , число месяцев  $M$  и начальные значения численностей жертв  $n$  и хищников  $p$ , и будет вычислять разность между количеством жертв при сосуществовании с хищниками и без них через  $M$  месяцев после заселения. Ограничения на входные параметры:  $A \geq 0$ ,  $R \geq 2$ ,  $n \geq 2$ ,  $p \geq 2$ ,  $1 \leq M \leq 1000$ , все числа целые, кроме  $A$ .

**Решение.**

```
R, M, N, P = map(int, input().split())
A = float(input())
N2=N*R**M
for i in range(M):
    N1 = int(N*R*2**(-A*P))
    P = max(N-int(N*2**(-A*P)),0)
    N=N1
print(N2-N)
```

**Задача 6.** Вы знаете, что на геостационарной орбите находится очень много спутников. Однако спутники на селеностационарную орбиту (круговую орбиту в экваториальной плоскости Луны, находясь на которой, спутник будет иметь постоянную проекцию на поверхность Луны) до сих пор не выведены.

а) Рассчитайте радиус такой орбиты.

б) Как будет двигаться спутник, который вывели на такую орбиту?

в) Какие орбиты для наблюдения за лунной поверхностью лучше использовать?

Масса Луны  $M = 7,348 \cdot 10^{22}$  кг (в 81,3 раза меньше массы Земли), радиус Луны  $R = 1737,5$  км, гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н  $\cdot$  м<sup>2</sup>/кг. Расстояние от Земли до Луны 384000 км, сидерический месяц (период обращения Луны вокруг Земли в инерциальной системе отсчета) равен 27,32 земных суток.

**Решение пункта а).** По определению селеностационарной орбиты, спутник должен иметь период обращения  $T$ , равный времени одного полного оборота Луны вокруг своей оси. Известно, что Луна обращена к Земле одной и той же своей стороной, т.е. этот период совпадает со временем полного оборота Луны вокруг Земли (сидерический месяц, равный 27,3 суток). Таким образом,  $T = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600$  с. Выразим  $T$  через радиус орбиты  $r$  и массу Луны  $M$ : закон Ньютона дает  $F = ma$ ,  $F = G \frac{Mm}{r^2}$ ,  $a = \omega^2 r$ ,  $2\pi\omega = T$ , откуда  $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ . Отсюда находим радиус орбиты

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = 88 \cdot 10^3 \text{ км.}$$

**Решение пункта б).** Найдем точки гравитационного равновесия в системе Земля–Луна:  $F_3 = F_L$ . Для точки, лежащей на отрезке с концами в центрах шаров, получим  $\frac{M_3}{R_1^2} = \frac{M_L}{R_2^2}$ ,  $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{81,3} \approx 9$ . Поскольку  $R_1 + R_2 = R = 384 \cdot 10^3$  км, то  $R_2 = 38,4 \cdot 10^3$  км. Таким образом, спутник на селеностационарной орбите будет испытывать силу притяжения Земли, большую, чем силу притяжения Луны. Значит, гравитационная модель двух тел к задаче не применима и надо использовать модель трех тел (Земля–Луна–спутник). В этой модели для определения зоны устойчивого движения вокруг меньшего тела (Луны) используется сфера Хилла. Радиус сферы Хилла

$$R_H = R \cdot \sqrt[3]{\frac{M_L}{3M_3}} = 61,5 \cdot 10^3 \text{ км}$$

дает верхнюю границу для зоны устойчивого движения вокруг Луны (реальная зона устойчивого движения ограничена величиной 0,33–0,5 радиуса сферы, т.е. от 20 до 30 тысяч километров от центра Луны). Таким образом, спутник, выведенный на селеностационарную орбиту, будет «в основном» двигаться по орбите Земли. Начальное влияние Луны следует воспринимать, скорее как гравитационный маневр, сделанный спутником. Конкретное поведение спутника под действием такого маневра зависит от точки орбиты, на которую мы вывели спутник после окончания вывода. Например, если точка вывода находится за Луной на луче, проходящем через центры Земли и Луны, то воздействие Луны на спутник сводится, в основном к ускорению по направлению движения. В результате спутник выйдет на сильно вытянутую эллиптическую орбиту Земли. Двигаясь по ней он «отстанет» от Луны (когда Луна совершит полный оборот, спутник не пройдет и половины своей орбиты). Второй пример — точка вывода лежит на отрезке Земля–Луна. Тогда спутник выйдет на орбиту Земли, лежащую наоборот ближе к Земле, чем орбита Луны. На этой орбите спутник обгонит Луну (когда спутник совершит полный оборот, луна не пройдет и половины своей орбиты). В любом случае, такой спутник

не годится для наблюдения за поверхностью Луны.

**Решение пункта в).** Лучше всего использовать точки Лагранжа. При этом, точки  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  (коллинеарные) неустойчивы, так что неподвижный спутник в таких точках требует постоянной коррекции или «живет в них» недолго. Несмотря на это, эти точки (а именно,  $L_1$  и  $L_2$ ) сейчас активно используются для размещения аппаратов: при правильно подобранных начальном положении и скорости спутника его орбита в окрестности  $L_1$  и  $L_2$  становится стационарной (для задачи трех тел) или почти стационарной (с учетом притяжения Солнца). Точки  $L_4$  и  $L_5$  устойчивы, но находятся далеко от поверхности Луны (расстояние такое же, как от Земли до Луны) и, таким образом, не несут никакой выгоды по сравнению, например, с орбитой МКС. К тому же, в  $L_4$  и  $L_5$  накапливается космический мусор, что создает для спутника опасность. Можно использовать орбиты небольшой высоты над Луной. На них влияние Земли невелико и орбита устойчива. При этом, использовать совсем низкие орбиты нельзя — гравитационный потенциал Луны сильно неоднороден (в отличие от Земли) и низкая орбита будет быстро деградировать, вырождаясь в эллиптическую. В результате, низкий спутник быстро упадет на поверхность Луны.